

d e b a t e

Validación empírica del conocimiento en clase de matemáticas, en la primaria

David Block

¿Quién y cómo determina si una respuesta en clase de matemáticas es correcta o falsa? Esta pregunta alude a la cuestión fundamental de la veracidad de un conocimiento. En matemáticas, como en otras disciplinas científicas, los criterios de verdad son particularmente explícitos, a diferencia de otras áreas del quehacer intelectual del hombre. Uno de los aspectos formativos atribuidos a esta disciplina es precisamente la práctica en la fundamentación explícita de cualquier proposición.

Guy Brousseau (1970), en su teoría de las situaciones didácticas, concibe el proceso de validación como parte fundamental del proceso amplio de construcción de un conocimiento matemático. Lo define, refiriéndose evidentemente a un hecho ideal y no a un hecho usual, como un proceso dialéctico en el cual el alumno entra en debate con la situación, y en particular con sus compañeros. La necesidad de validar es provocada por la situación misma y las formas de hacerlo evolucionan lentamente.

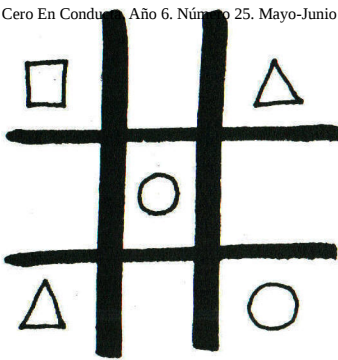
Distingue tres clases de validación: empírica, semántica y sintáctica. La primera describe el proceso de probar algo, mostrando que funciona, sin explicar necesariamente porqué. Las otras dos clases incluyen una argumentación y pertenecen a una etapa más avanzada del pro-

ceso.

En este artículo plantearé algunas reflexiones sobre los procesos de validación empírica, con el objetivo de mostrar su riqueza didáctica y de contribuir al conocimiento de algunas de las características que asume en situaciones particulares.

Brousseau ha destacado la importancia de que una situación didáctica ofrezca al alumno la posibilidad de validar empíricamente sus ensayos de resolución. Gracias a esta condición, puede favorecerse un 'diálogo' relativamente autónomo entre el alumno y la situación: el primero ejerce acciones sobre la segunda y recibe información de regreso sobre el efecto de sus acciones. Este diálogo puede jugar un papel importante en la evolución de las estrategias del alumno. Los errores, al hacerse visibles para él, al señalarle los límites de sus estrategias y propiciar su modificación o sustitución, cobran un valor constructivo.

Veamos, primero en un ejemplo sencillo, el momento de la validación empírica: se pone una cantidad de objetos a la vista de los alumnos. Sin que ellos vean, se tapan o se guardan algunos. Después, ellos ven los que quedan y deben decir cuántos se taparon. Dependiendo de las cantidades en juego y de los conocimientos previos de los alumnos, usarán uno u otro procedimiento para averiguarlo,

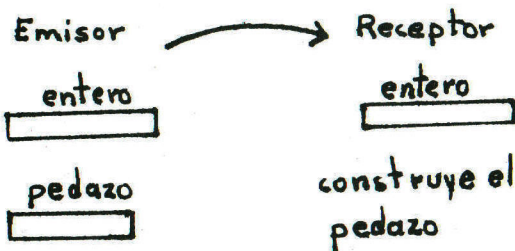


desde contar (si había 10 y quedan 3, contarán los que faltan para tener otra vez 10), hasta restar convencionalmente.

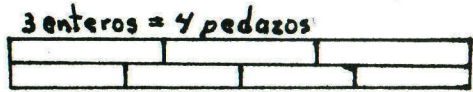
Usen el procedimiento que usen, una vez que tienen sus resultados, *pueden ver la cantidad escondida* para verificar si acertaron o para saber qué tanto se acercaron. Este es el momento de validación empírica de las respuestas de los alumnos.

El ejemplo que veremos ahora forma parte de un estudio experimental sobre la enseñanza de las fracciones (Balbueno, 1988; Block, 1987).

Los alumnos de 5º grado enfrentan un problema cuya resolución implica un uso implícito de las fracciones. Un equipo emisor tiene una 'barra de chocolate' entera y un pedazo de la barra. Envía un mensaje, sin dibujos, a un equipo receptor para que éste construya un pedazo del mismo tamaño que el del emisor. La situación ofrece a los alumnos una manera de verificar si el mensaje funcionó: comparan el pedazo del equipo emisor con el que construyó el equipo receptor.



Al término del año escolar anterior, por lo menos la mitad del grupo logró resolver el problema conmensurando el entero y el pedazo. Este procedimiento contiene un uso implícito de la fracción:



Mensaje:

Junta 3 enteros y divídelos entre 4.

Por lo tanto el receptor puede construir el pedazo uniendo 3 enteros y dividiendo la longitud así obtenida entre 4.

Al año siguiente, cuatro meses después, al aplicar nuevamente esta situación, la mayor parte de los alumnos retomó procedimientos más familiares para ellos, pero menos adecuados para resolver el problema. Tratan nuevamente de resolver el problema con números naturales. La situación didáctica se repitió cinco veces más, con algunas variantes. En términos generales éstos fueron los resultados:

1a. Sesión: Sólo dos equipos utilizan la conmensuración. Estos son los únicos mensajes que funcionan.

2a. Sesión: Cuatro equipos utilizan la conmensuración. Entre éstos están los únicos tres mensajes que funcionan.

5a. Sesión: Seis equipos utilizan la conmensuración. Entre éstos están los únicos cuatro mensajes que funcionan.

En el cuadro 1 pueden verse los detalles de los resultados de la 2a. sesión.

Es bastante claro que la prueba empírica contribuyó a poner de manifiesto las limitaciones de varios procedimientos y, a la vez, permitió mostrar la efectividad de otros. Fue entonces un factor que pro-

M E N S A J E	EL RECEPTOR CONSTRUYE EL PEDAZO	LOS PEDAZOS COINCIDEN	No. DE NIÑOS QUE ESCOGEN EL MENSAJE (DF 32)
1) "Nuestro pedazo es más chico que el entero y le sobra 1 cm ó 1mm y medio de largo (estimación)"	SI	NO	0 NIÑOS
2) "Nuestro pedazo es de $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$ y" (muy buena aproximación) (fraccionamiento)	SI	NO	0 NIÑOS
3) "Miden 2 a lo ancho de un entero y la mitad de lo ancho de lo entero" (aproximación regular) (unidad extra y fraccionamiento)	SI	NO	4 NIÑOS (de un equipo)
4) "Tres cuartos del entero" (aproximación regular) (fraccionamiento 2)	SI	NO	4 NIÑOS (de un equipo)
5) "En dos enteros caben 3 de nuestros pedazos" (Conmesuración)	SI	SI	7 NIÑOS
6) "Pon dos enteros divídelos en $\frac{3}{3}$, luego saca $\frac{1}{3}$ de los 3 tercios" (Conmesuración 2)	SI	SI	12 NIÑOS
7) "Juntan 2 enteros divídanlos en tercios y les saldría nuestro pedazo" (Conmesuración 3)	SI	SI	7 NIÑOS
8) "Hay 5 enteros y 6 pedazos, pon 5 enteros y pártelos en 6 pedazos y saca una sexta parte" (Conmesuración)	NO	...	5 NIÑOS

Cuadro # 1

bablemente influyó en la difusión del proceso de conmensuración dentro del grupo.

Destaquemos aquí un hecho importante: el sentido que para los alumnos tendrá el procedimiento con el que finalmente pueden resolver el problema, está dado no sólo por su carácter manifiesto de herramienta, sino también por todos los procedimientos que lo precedieron y con los que no pudieron resolver el problema. Dicho en otros términos, el sentido de las fracciones está dado también y fundamentalmente por las limitaciones de los números naturales para resolver determinados problemas. Es en esta perspectiva que el proceso de validación empírica revela su mayor dimensión. Es un proceso necesario en una didáctica fundada en determinada concepción epistemológica sobre el conocimiento matemático (Brousseau, 1976).

El mismo ejemplo ilustra otra característica frecuente: la validación empírica difícilmente obra por sí sola en la validación de un procedimiento dentro del grupo.

En este caso, identificamos por lo menos dos fuentes más de validación. Una fue la actitud del profesor. En la puesta en común al término de la primera sesión, fue notoria su inclinación por los procedimientos de conmensuración: permitió, por ejemplo, que los alumnos cuestionaran otros procedimientos sin pedirles mayor claridad y sin dar más oportunidad a sus autores de defenderlos. En cambio, insistió en identificar con los alumnos el motivo por el cual la conmensuración en algunos casos no funcionó, dejándoles claro que dicho motivo no invalidaba el procedimiento.

Por otro lado, en la cuarta sesión, se dictó a todos los alumnos uno de los men-

sajes de conmensuración, para que lo interpretaran. Casi todos pudieron hacerlo. Esta situación tendió evidentemente a validar dicho procedimiento porque fue el único escogido para ser probado por todos y porque casi todos pudieron comprobar que funcionaba.

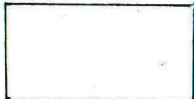
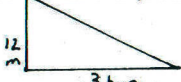
También sucede con frecuencia que la validación empírica obra en un sentido contrario al esperado, o bien porque se produce una validación excesivamente fuerte de un procedimiento precario cuya evolución se quisiera propiciar, pero que los alumnos no abandonan por el dominio que adquieren sobre él y por el éxito que les produce; o bien, porque en el proceso un procedimiento más avanzado resulta invalidado.

Esto último nos sucedió en una de las ocasiones en las que aplicamos la misma situación didáctica que describimos anteriormente. Un solo equipo recurrió a la

conmensuración para resolver el problema. Sin embargo, los receptores del mensaje no lo comprendieron. En la puesta en común, el grupo opinó que efectivamente, ese mensaje no se entendía y se inclinaron por otros que no tenían ninguna posibilidad de resolver la situación, pero que les parecían más claros y consideraban que podrían mejorarse.

Esto muestra por un lado, la necesidad de cuidar ciertos aspectos en el diseño de las situaciones, de tal forma que factores que en ese momento son secundarios, por ejemplo la dificultad para partir en cinco partes iguales, no obstaculicen la puesta en juego de un procedimiento que se quiere propiciar. Por otro lado, es evidente también que, a partir de cierto momento, la intervención del maestro es, a pesar de todo, necesaria en el proceso de validación. No es lo mismo, sin embargo, una intervención al final y

Nombres de cuerpos geométricos y sus Formulas

 25 cm 15 cm Nombre: <u>rectángulo</u> Formula: <u>$b \times h \div 2$</u> Sustitulle: <u>$25 \times 15 = 375 \div 2 =$</u> Area: <u>187.5 m² sobra 1</u>	 31 m Nombre: <u>cuerpo</u> Formula: <u>$b \times h \div 2$</u> Sustitulle: <u>$31 \times 31 = 961 \div 2 =$</u> Area: <u>480.5 m² sobra 1</u>
 12 m 35 m Nombre: <u>triángulo</u> Formula: <u>$b \times h \div 2$</u> Sustitulle: <u>$12 \times 35 = 420 \div 2 =$</u> Area: <u>21</u>	 Nombre: <u>Paralelogramo</u> Formula: <u>$b \times h \div 2$</u> Sustitulle: _____ Area: _____

Ejercicio de 4o. grado de primaria

complementaria que al inicio y única.

Me referiré ahora a otra característica del proceso de validación empírica: la subjetividad de la prueba.

El carácter empírico de este tipo de validación sugiere una idea de objetividad y contundencia. La situación muestra al alumno, con "hechos", el grado de éxito alcanzado. Sin embargo, la selección de los hechos que se utilizan para probar, así como la información que cada alumno obtiene de ellos, depende siempre de sus conocimientos previos y de su desarrollo cognitivo. Así, lo que para un alumno constituye una prueba contundente de algo, puede no serlo en absoluto para otro. Esto se manifiesta con mayor evidencia cuando la situación toca aspectos cuyo grado de dominio por el grupo es muy heterogéneo.

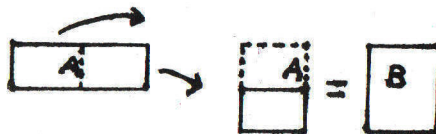
En diferentes sesiones (Block, 1987; Dávila, 1991) alumnos de 1º, 2º, 3º y 4º discutieron acerca de si mitades de enteros iguales, pero con distinta forma, eran iguales en superficie o no.



En los grupos de 1º y 2º, la mayor parte de los alumnos afirmó que una de las dos mitades era mayor. En el grupo de 3º, algunos alumnos sospecharon la posible igualdad, y en el de 4º, la mayoría afirmó la igualdad.

Se les dieron a todos hojas y tijeras para que verificaran lo que pensaban. Un buen número de alumnos de 3º descubrió la igualdad de las partes A y B, recortando una de las dos y reacomodando los

pedazos para igualar las formas.



Muy pocos alumnos de 1º, 2º y de 4º hicieron esta prueba y por motivos muy distintos. En 1º y 2º, muchos alumnos rechazaron la prueba realizada por otros compañeros, por considerar que al cortar una de las partes y reacomodarlas, el tamaño ya no era el mismo. Con esta hipótesis es comprensible que no pensarán en cortar. En 4º, para un buen número de alumnos no hizo falta cortar, es decir, no hizo falta validar empíricamente. Para ellos la igualdad era necesaria en virtud de que los pedazos eran mitades de enteros iguales.

El que una prueba empírica sea contundente para todos, depende entonces de que las relaciones que ésta pone en juego sean dominadas por todos. El anterior ejemplo de los mensajes lo ilustra. Para todo el grupo la superposición es ya una manera aceptada de comparar longitudes.

Con frecuencia sucede que las situaciones en las que la validación empírica no es contundente para todos, crea en los alumnos una mayor necesidad para validar con argumentos, explicitando algunas de las ideas que subyacen a sus procedimientos.

Comentario final

Decía al principio que las matemáticas se distinguen por la claridad de sus

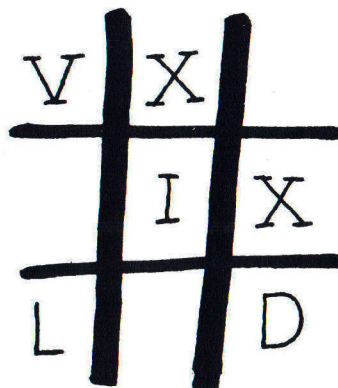
procesos de validación y que se argumenta con frecuencia que ésta constituye una de sus características formativas. Sin embargo, en la práctica de la enseñanza, el ejercicio de la validación está fuertemente centrado en el maestro (recordemos una de las preguntas recurrentes en las clases “¿está bien maestro?”). Incluso la práctica de demostrar que se pide a los alumnos a partir del nivel medio, tiende a consistir en los hechos, en la memorización de pruebas ajenas, también sometidas a la validación del maestro.

Otras veces, se invita a los alumnos a verificar repasando lo que han hecho (“está mal, revisa”), o, en ciertos casos como el de la resta y la división, aplicando la operación inversa. Estas formas de validar no son malas, pero sí son insuficientes. Implican validar a partir de las mismas relaciones que fueron puestas en juego desde el principio, o, incluso de relaciones más complejas (como las operaciones inversas).

La validación empírica implica poner en juego relaciones distintas a las implicadas en la resolución del problema, relaciones que se dominan mejor: contar en vez de restar, o, restar en vez de dividir, superponer dos tiras, recortar y reacomodar, etcétera.

Este tipo de validación propicia además, un sentido de los términos “correcto”, “incorrecto”, más independiente de la valoración del maestro y permite así un mayor compromiso del alumno con la situación. Así mismo, posibilita la identificación de errores y permite la evolución de los procedimientos.

Propiciar la necesidad de convencer a alguien de la validez de un hallazgo personal, dar los medios que posibiliten esta tarea, reconocer que las formas de demostrar son precarias al principio pero evolucionan con la práctica, posiblemente



te permita a los alumnos vivir la experiencia de la demostración y los ayude a comprender más adelante el sentido de la demostración matemática.

Bibliografía

- Balbuena, H. (1988). *Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria*. Tesis de Maestría, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México.
- Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN. México.
- Brousseau, G. (1970). “Processus de mathématisation”. En: *La mathématique à l'école élémentaire*, París, AM-PEP, N° especial.
- Brousseau, G. (1976). “Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques”. En: *Proceedings of the CIAEM*.
- Dávila, M. (1991). *Situaciones de reparto: una introducción a las fracciones*. Tesis de Licenciatura. Universidad Pedagógica Nacional, SEP. México.